جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحانات الدورة الأولى للعام الدراسي 2013 – 2014
أسئلة مقرر البنى الجبرية (1)
سنة ثانية رياضيات

العلامة: 100 درجة
الاسم:

أجب عن الأسئلة الآتية:

السؤال الأول (36 درجة):

أجب بكلمة صح، أو خطأ لكل مما يلي، مع ذكر التعليل أو التصويب لحالة الخطأ فقط:

(1) إن $(Q^+ , *)$ زمرة حيث العملية * تعرف بالعلاقة $x * y = \frac{x \cdot y}{2}$ وذلك لكل $x, y \in Q^+$.

(2) إن المجموعة $U_6(20) = \{1, 7, 13, 19\}$ هي زمرة جزئية من زمرة اولر $U(20)$.

(3) مرتبة العنصر (1-) في زمرة الأعداد الصحيحة Z تساوي 2.

(4) إن مركز أي زمرة تبديلية G $(Z(G))$ يساوي G نفسها.

(5) إن مقلوب العنصر 9 في زمرة اولر $U(14)$ يساوي 5.

(6) عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_7(21)$ من زمرة اولر $U(21)$ يساوي 3.

(7) عدد المرافقات اليسارية للزمرة الجزئية $H=\{1,7, 13, 19\}$ في زمرة اولر $U(30)$ يساوي 5.

(8) إن العنصر a^4 مولد للزمرة الدوارة $G = < a >$ والتي مرتبتها 10.

(9) عدد عناصر زمرة الخارج $<20>/<4>$ يساوي 4.

(10) عدد الهومومورفيزمات الزمرية من الزمرة Z_{20} إلى الزمرة Z_8 يساوي 2.

(11) $U(8) \cong U(10)$

(12) رتبة العنصر $(2, 3)$ من الزمرة $Z_5 \oplus Z_6$ يساوي 30.

السؤال الثاني (40 درجة): لتكن $(G', \cdot)$ ، $(G, \cdot)$ زمرتين ما، علل صحة ما يلي:

(1) إذا كانت G تبديلية فإن المجموعة $B = \{x^2 : x \in G\}$ هي زمرة جزئية من G.

(2) إذا كان $a \in G$ ومرتبته n فإنه أيا كان $t \in Z$ الذي يقسم n فإن رتبة $(a^{\frac{n}{t}})$ تساوي t.

(3) إذا كانت G زمرة منتهية مرتبتها عدد أولي، فإن G تكون زمرة دوارة.

(4) إذا كان $a, b \in G$ و H زمرة جزئية في G، فإنه إما $aH \cap bH = \emptyset$ أو $aH = bH$.

(5) إذا كان $a \in G$ و $f : G \to G'$ ايزومورفيزما زمريا، فإن $o(a) = o(f(a))$ (o تعني مرتبة).

السؤال الثالث (24 درجة):

(1) لتكن G زمرة و H, K زمرتين جزئيتين ناظميتين في G بحيث $K \subseteq H$، ولتكن K ناظمية في H. أثبت أن زمرة الخارج H/K ناظمية في زمرة الخارج G/K.

(2) إذا كانت $(G, .)$، p- زمرة (p عدد أولي)، فإن كل زمرة جزئية من G هي p- زمرة.

2014 - 2 - 3

مع أطيب التمنيات بالنجاح

د. إيمان الخوجة

د. إيمان الخوجة (4)

سلم تصحيح مادة الجبر ٢ /

سنة ثانية رياضيات . الفصل الأول

للعام الدراسي 2013 - 2014

الجواب الأول . 36 درجة لكل سؤال ثلاث درجات

1- صح

2- خطأ ، لأن 6 لا ينتمي 20 أو $13\times13 = 9 \bmod 20$ لا ينتمي إلى $U_6(20)$.

3- خطأ ، غير منتهية .

4- صح

5- خطأ ، لأن $9\times5 = 3 \bmod 14$.

6- خطأ ، عدد عناصر الزمرة الجزئية $U_7(21)$ من الزمرة $U(21)$ تساوي 2 .

7- خطأ ، يساوي 2

8- خطأ ، لأن $\gcd(4,10)=2$ وبالتالي a^4 ليس مولد لها .

9- عدد عناصر زمرة الخارج $\frac{<4>}{<20>}$ يساوي 5 .

10- عدد الهوموموفيزمات الزمرية من Z_{20} إلى Z_8 يساوي 4

11- خطأ ، لأن $U(8)$ ليست دوارة و $U(10)$ دوارة .

12- رتبة العنصر $(2,3)$ من الزمرة $Z_5 \oplus Z_6$ يساوي 10 .

الجواب الثاني 40 درجة

1) بما أن $e\in G$ فإن $e^2\in B$ وبالتالي $B\neq\phi$. ليكن $a^2, b^2\in B$

عندئذ $a,b\in G$ و $ab^{-1}\in G$ أي $(ab^{-1})^2\in B$. من جهة أخرى نجد

$$a^2(b^2)^{-1} = a^2(b^{-1})^2 = (ab^{-1})(ab^{-1}) = (ab^{-1})^2\in B$$ 8

ومنه B زمرة جزئية من G .

الجواب الثالث: [24 درجة]

1) من أجل ذلك نثبت أن H/K نواة لهومومورفيزم منطلقه G/K.

نعرف العلاقة: $\varphi: G/K \longrightarrow G/H$ على النحو الآتي $\varphi(gK)=gH \; ; \; \forall gK\in G/K$

إن φ تطبيق فلنفرض أن $g_1K, g_2K \in G/K$ بحيث $g_1K = g_2K$

عندئذ $g_1 \in g_1K = g_2K \subseteq g_2H$ ومنه $g_1H = g_2H$ أي أن $\varphi(g_1K) = \varphi(g_2K)$

كما أن φ هومومورفيزم لأن $\varphi(g_1K \cdot g_2K) = \varphi[(g_1g_2)K] = (g_1g_2)H = (g_1H)(g_2H) = \varphi(g_1K)\varphi(g_2K)$

لنبرهن أن $\ker\varphi = H/K$. ليكن $xK \in \ker\varphi$ عندئذ $\varphi(xK)=xH=H$

ومنه $x \in H$ وهكذا فإن $xK \in H/K$ أي $\ker\varphi \subseteq H/K$. ليكن $yK \in H/K$

عندئذ $y \in H$ ومنه $\varphi(yK)=yH=H$ أي أن $yK \in \ker\varphi$ ومنه $H/K \subseteq \ker\varphi$

وبما أن $\ker\varphi$ ناظمية في G/K فإن H/K ناظمية في G/K.

2) لتكن H زمرة جزئية من G عندئذ حسب مبرهنة لاغرانج فإن:

لنفرض أن $(G:1)=p^n$ حيث $n\in\mathbb{N}^*$

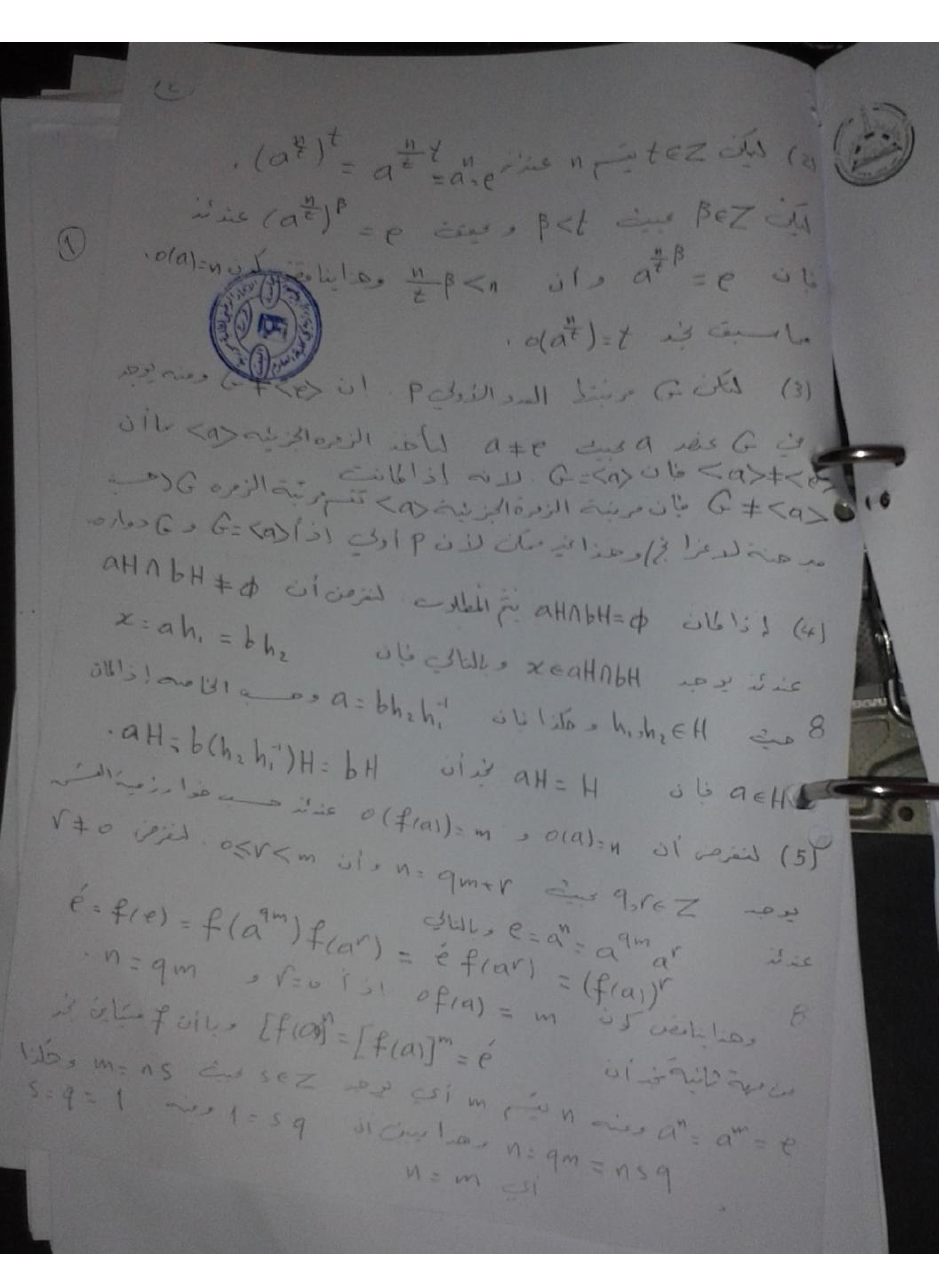
$$p^n = (G:1) = (G:H)(H:1)$$

وهذا يبين أن $(H:1)$ تقسم المقدار p^n ومنه $(H:1)=p^s$ حيث

$0 \le s \le n$ ومنه H هي p- زمرة.

انتهت الأجوبة

د. إيمان الخوجه



(٤)

①

(2) لتكن $t\in Z$ يقسم n عندئذ $(a^{\frac{n}{t}})^t = a^{\frac{n}{t}t} = a^n = e$.

لتكن $\beta\in Z$ بحيث $\beta<t$ وبحيث $(a^{\frac{n}{t}})^\beta = e$ عندئذ

فإن $a^{\frac{n}{t}\beta} = e$ وإن $\frac{n}{t}\beta < n$ وهذا يناقض كون $o(a)=n$.

مما سبق نجد $o(a^{\frac{n}{t}}) = t$.

(3) لتكن G مرتبة العدد الأولي p. إن $G \neq \langle e\rangle$ ومنه يوجد

في G عنصر a بحيث $a\neq e$ لنأخذ الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ بما أن

$\langle a\rangle \neq \langle e\rangle$ فإن $G=\langle a\rangle$. لأنه إذا كانت

$G \neq \langle a\rangle$ فإن مرتبة الزمرة الجزئية $\langle a\rangle$ تقسم مرتبة الزمرة G (حسب

مبرهنة لاغرانج) وهذا غير ممكن لأن p أولي إذاً $G=\langle a\rangle$ و G دوارة.

(4) إذا كان $aH\cap bH=\phi$ تم المطلوب. لنفرض أن $aH\cap bH\neq\phi$

عندئذ يوجد $x\in aH\cap bH$ وبالتالي فإن $x=ah_1=bh_2$

حيث $h_1,h_2\in H$ وهكذا فإن $a=bh_2h_1^{-1}$ ومنه الخاصة إذا كان

$a\in H$ فإن $aH=H$ نجد أن $aH=b(h_2h_1^{-1})H=bH$.

(5) لنفرض أن $o(a)=n$ و $o(f(a))=m$ عندئذ حسب خوارزمية القسمة

يوجد $q,r\in Z$ بحيث $n=qm+r$، أي $0\le r<m$. لنفرض $r\neq 0$

عندئذ $e=a^n=a^{qm}a^r$ وبالتالي $\acute{e}=f(e)=f(a^{qm})f(a^r)=\acute{e}f(a^r)=(f(a))^r$

وهذا يناقض كون $o f(a)=m$ إذاً $r=0$ و $n=qm$.

وبما أن f متباين نجد $[f(a)]^n=[f(a)]^m=\acute{e}$

ومن جهة ثانية نجد أن $a^n=a^m=e$ ومنه n يقسم m أي يوجد $s\in Z$ حيث $m=ns$ وهكذا

$n=qm=nsq$ وهذا يبين أن $1=sq$ ومنه $s=q=1$

أي $n=m$.